Universidad Nacional de La Plata – Facultad de Ciencias Exactas
Análisis Matemático II (CIBEX) – 1er Sem 2022

Segundo Parcial – Segunda Fecha
12/07/2022

Apellido y Nombre: [redacted] ....

Comisión ....C7b.......... *Carrera:* Biotecnología... *Nro de alumno:* .645851 6.....

1. (a) Una lámina de cierto metal tiene densidad variable modelada por la función $\rho(x,y) = 2\,e^{x}$, en kg/m^2. La placa tiene forma triangular, y se puede representar en el plano coordenado siendo sus vértices los puntos $A(0,0)$, $B(1,1)$ y $C(2,0)$. Esquematizar la placa, y calcular su masa. Justificar todos los procedimientos.

   (b) El sólido E queda delimitado por las siguientes superficies (midiendo las longitudes en centímetros): el plano $z=0$; la superficie de un cilindro circular de eje z y radio 2; y la de un semicono de ecuación $z = 2 + \sqrt{x^2+y^2}$. Dibujar el sólido indicando las superficies que lo delimitan. Expresar E como los siguientes conjuntos : $E = \{(x,y,z) : \ldots\ldots\}$, $E = \{(r,\theta,z) : \ldots\ldots\}$. Calcular justificadamente el volumen de E.

2. (a) Considerar el arco C de hélice parametrizado y orientado según $x(t) = a\cos t$, $y(t) = a\sin t$, $z(t) = ht$, para t variando de 0 a 2π (siendo a y h dos constantes positivas). Hacer un dibujo esquemático de C, indicar dónde comienza y termina la curva. Calcular la integral de línea $\int_C [-yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz]$. El resultado de dicha integral, ¿depende del sentido de recorrido de la curva? ¿Por qué?

   (b) Sea S la superficie parametrizada por $\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 3-u)$, siendo $0 \le z(u,v) \le 3$ con $v \in [0,2\pi]$ ¿De qué superficie se trata? Esbozar un gráfico de la misma. Calcular la integral de superficie $\iint_S f(x,y,z)\,dS$ siendo $f(x,y,z) = x^2+y^2-z$. ¿Cuál es la orientación asignada a S por la parametrización dada? Incluir en el gráfico un vector que indique la orientación de la superficie, el mismo debe estar ubicado en el punto correspondiente a su elección. La orientación ¿influye en el resultado de la integral? ¿Por qué?

3. (a) En tus palabras, ¿qué significa que un campo de vectores derive de un potencial escalar? Mostrar que el siguiente campo vectorial gradiente posee función potencial en R^3 y hallarla: $\vec{F}(x,y,z) = (2xy+z^3)\,\check{i} + x^2\,\check{j} + 3xz^2\,\check{k}$. ¿Cómo calcularías el trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de una curva suave de R^3 que va del punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al punto $P_1(x_1,y_1,z_1)$? Justificar adecuadamente la respuesta.

   (b) Sea $\vec{F}(x,y) = x\,\check{i} - 3xy\,\check{j}$ un campo vectorial en R^2. Calcular la integral de línea de dicho campo entre los puntos $O(0,0)$ y $P(1,2)$ a lo largo de los siguientes caminos: (i) $\vec{r}(t) = (t^2, 2t)$; (ii) el segmento de recta de O a P. A partir de estos resultados, ¿qué puede deducir sobre el campo $\vec{F}$? Justificar.

   recta → ec. paramétricas $\begin{cases} x = x_0 + \vec{v}_1 t \\ y = y_0 + \vec{v}_2 t \end{cases}$

4. (a) Determinar la divergencia de $\vec{F}$, para cada uno de los siguientes campos vectoriales: (i) $\vec{F}(x,y,z) = (2x^2y, 2xy^2, xy)$; (ii) $\vec{F}(x,y) = (\sin(xy), 0)$; (iii) $\vec{F}(x,y,z) = (x-z)\,\check{i} + (\sqrt{y}-2y)\,\check{j} + (z-x)\,\check{k}$.
   ↳ $\mathbb{R}^3$ ↳ $\mathbb{R}^2$
   Indicar justificadamente en cuál o cuáles de estos casos, es aplicable el teorema de Gauss para una esfera de radio a ($a>0$, fijo) centrada en $(0,0,0)$. Enunciar el teorema y verificar sus hipótesis, en el/los casos que corresponda.

   $\to W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{S}$

   (b) Se desea determinar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\vec{F}(x,y) = (-16\,y + \sin(x^2))\,\check{i} + (4\,e^{17y} + 3\,x^2)\,\check{j}$ que actúa a lo largo de la curva cerrada C, suave a trozos, conformada por las rectas $y=x$, $y=-x$, y el arco de la circunferencia $x^2+y^2=1$ con $y \ge 0$ que se encuentra entre ellas. Graficar dicha curva y marcar la región que queda encerrada por C. ¿Qué teorema conviene aplicar en este caso? Enunciarlo y justificar verificando sus hipótesis.

   ↓
   Teorema de Green